向量空间理论的“量子速读法”

——几何直观引导教与学

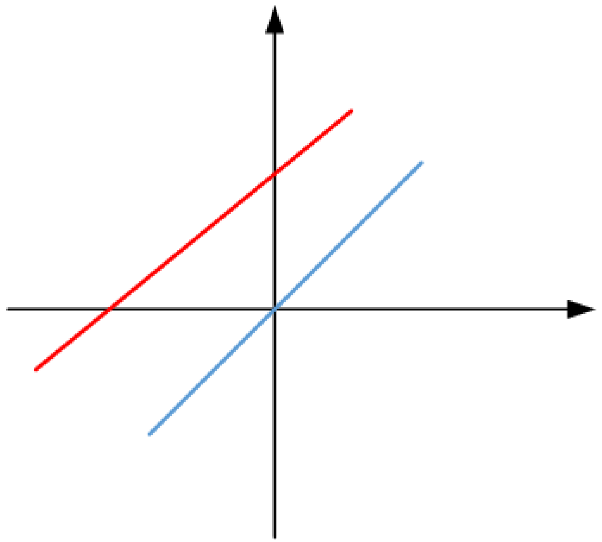
蒋剑剑@宁德师范学院
j.j.jiang@foxmail.com

江湖传说……

- 量子速读法名震江湖，若掌握了它
- 那么3秒钟即可学会向量空间理论
- 更要紧的是，欲练此功，不必自宫
- 秘诀很简单：抓住子空间的塌缩性
- 用几何直观来把握线性关系的内涵
- 数形结合百般好，量子塌缩见分晓

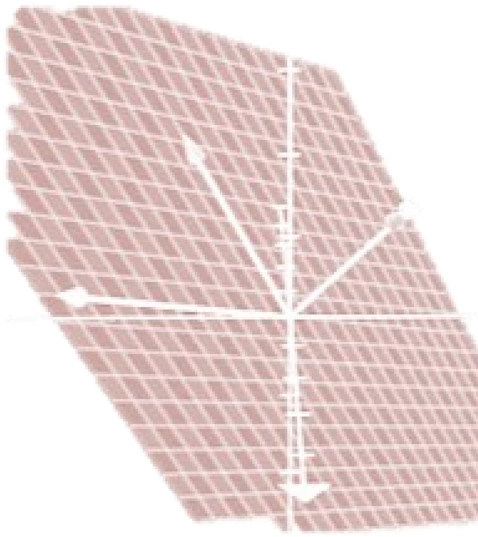
几何的主角是空间

- 向量空间是容纳向量加法和数乘两种运算的平台
- 对于大空间包含小空间，后者即为前者的子空间
- 一个零向量就是一个子空间，直觉上它是零维的
- 一个非零向量不是子空间，对加法和数乘不封闭
- 怎样才能够封闭？把它的所有数乘都放进来即可
- 所以一个非零向量α恰好确定一条含有O的直线
- 它是包含α的最小子空间，称作α张成的子空间



向量组张成的子空间

- 包含两个向量α和β的最小子空间记作$\langle\alpha,\beta\rangle$，它是怎么样的呢?
- 由于$\langle\alpha,\beta\rangle$对数乘封闭，所以它包含所有$k_1\alpha$和$k_2\beta$，$k_1,k_2\in\mathbb{F}$
- 由于$\langle\alpha,\beta\rangle$对加法封闭，所以它包含所有$k_1\alpha+k_2\beta$，$k_1,k_2\in\mathbb{F}$
- 形如$k_1\alpha+k_2\beta$的向量就称为α,β的线性组合，其全体是子空间
- 所以$\langle\alpha,\beta\rangle$就是$\alpha,\beta$的全体线性组合，称为由$\alpha,\beta$张成的子空间
- 它要么是$\{O\}$，要么是一条直线，要么是一个平面，再无其它
- 如果$\langle\alpha,\beta\rangle$是平面，直觉上，两个向量张出二维，未发生塌缩
- 显然以上讨论可以推广到任意有限多个向量（张成的子空间）



- 给定一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，令

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle=\{\,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\mid k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbb{F}\},$$

称为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$张成的子空间；它是包含$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的最小子空间.

- 我们关心$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$是否存在塌缩：

$$\{O\}\subset\langle\alpha_1\rangle\subset\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\subset\cdots\subset\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle?$$

其中$\subset$代表“真包含于”，不能相等；如上一串子空间称为一个完备旗.

- 若$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$存在塌缩，找到首次发生塌缩的位置，即设$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_t\rangle$尚未塌缩，但$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1}\rangle$；即$\alpha_{t+1}$导致塌缩了.

- 这意味着$\alpha_{t+1}\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\rangle$，也即$\alpha_{t+1}$形如$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$，称$\alpha_{t+1}$可被$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$线性表出；此时必有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=O.$$

线性相关性=空间塌缩性

- 若$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$不存在塌缩，就称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，否则称它们线性相关.
- 从前面的讨论容易看出，线性相关就是说存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=O.$$

- 若部分组线性相关，则整体组线性相关；若整体组线性无关，则部分组线性无关.
- 对$W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$，在$\{O\}\subseteq\langle\alpha_1\rangle\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\subseteq\cdots\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$中挑出$\subset$的部分，删掉塌缩的向量，就得到了一个旗$\{O\}\subset\langle\alpha_{i_1}\rangle\subset\langle\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\rangle\subset\cdots\subset\langle\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\rangle=W$.
- 这个旗的长度r就是我们直觉中W的维数$\dim W$；问题是W也可能由另一组向量张成，即$W=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\rangle$，而由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$导出的旗长度也为$r$吗？ 我们要论证确实如此！

所有完备旗都等长

- 对子空间W，我们无非想证明它的任何两个完备旗长度相等；因此先把最短的完备旗长作为$\dim W$，这是完全由W决定的量. 我们先来证明 **dim** 遵从严格的单调性：

  设V是W的真子空间，则$\dim V < \dim W$.

- 证明：设$\{O\} \subset W_1 \subset \cdots \subset W_s = W$是$W$的一个最短完备旗，考虑如下子空间串

  $$\{O\} \subseteq W_1 \cap V \subseteq \cdots \subseteq W_s \cap V = V$$

  中真包含（不等）部分. 例如设$W_i \cap V \subset W_{i+1} \cap V$，任取$\beta \in W_{i+1} \cap V$使$\beta \notin W_i \cap V$，则不难证明$W_i + \langle \beta \rangle = W_{i+1}$. （提示：据完备旗的定义，有某$\gamma$使$W_i + \langle \gamma \rangle = W_{i+1}$）

- 进而易证$W_i \cap V + \langle \beta \rangle = W_{i+1} \cap V$，于是$V$有长度$\le s$的完备旗，即得$\dim V \le \dim W$.
- 若等号成立，则以上子空间串中皆为真包含关系，于是依次可得 $W_1 \subseteq V$，$W_2 \subseteq V, \cdots$ 竟有$W_s \subseteq V \subset W$，产生矛盾；故只能是$\dim V < \dim W$.
- 现对任何完备旗$\{W_i\}_{i=1}^{t}$，由$0 < \dim W_1 < \cdots < \dim W_t$立见$t \le \dim W \le t$；众旗同长.

倚天既出，谁与争锋

- 子空间的维数这一直观概念得到了严格而精确的定义，剩下皆细枝末节，可以量子速读.
- 对于W的任一完备旗$\{O\}\subset\langle\alpha_1\rangle\subset\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\subset\cdots\subset\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\rangle=W$，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$W$的一个基. 其实一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$W$的基 当且仅当 它线性无关且能张成$W$.
- 任给一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，从中挑出一部分线性无关的向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$使其能线性表出每个$\alpha_i$，即$\langle\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$，则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大（线性）无关组，并称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r$，实际上 $r=\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$.
- 秩遵从严格单调性：若$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle\subset\langle\beta_1,\cdots,\beta_t\rangle$，则 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

小试牛刀

- 假设所考虑的向量都是列向量，即都在列向量空间$\mathbb{F}^n$中. 任给一组向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_s \in \mathbb{F}^n$，将其按顺序排成一个矩阵$A=(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_s)$.
- 对A做初等行变换，不会改变其列向量之间的任何线性关系. 比方说：
- 若$\alpha_3=\alpha_1-3\alpha_2$，则行变换后第三列依然等于第一列减去3倍第二列.
- 考虑子空间串$\{O\}\subseteq\langle\alpha_1\rangle\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\subseteq\cdots\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$，它的维数序列是不随初等行变换而变的；而$A$的行最简阶梯形之外观（阶梯样式）完全由维数序列决定，即外观唯一；当外观确定，列向量之间的线性关系也随之确定. 故A的行最简阶梯形在初等行变换之下是唯一确定的.

感谢倾听，请多指教

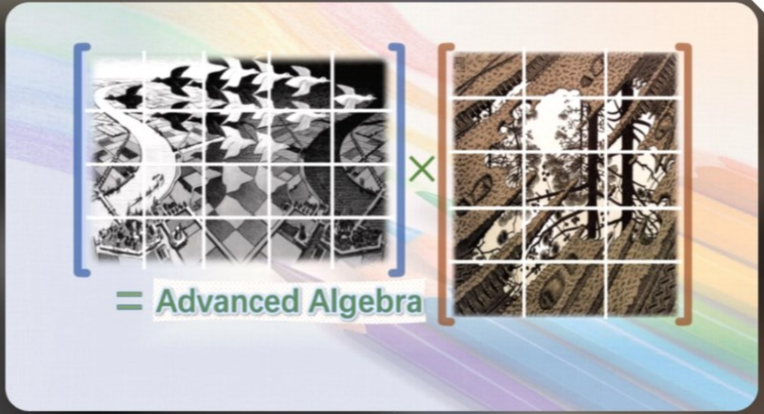
结束语

- 有经验的朋友一定已经看出，这里的处理方式非常内蕴和整体，很方便推广到模论中去
- 线性代数≃线性几何；代数是语法，几何是语义；数形结合百般好

In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of each individual mathematical domain.

Hermann Weyl

In: Morris Kline, Mathematical Thought From Ancient to Modern Times (p. 924)



高等代数

林秀清 教授 |宁德师范学院

精炼重构主体学习内容，有机融入优秀传统数学文化，适当选用在线一流课程等优质资源，精心开展教学（两学期）。彰显代数思想方法，重视知识融合与现实应用，努力促使学生学会学习。学习任务点明确，内容新，资源丰富，开放共享。本课程负责人是“福建省优秀教师”林秀清教授，SPOC网站负责人是蒋剑剑博士。

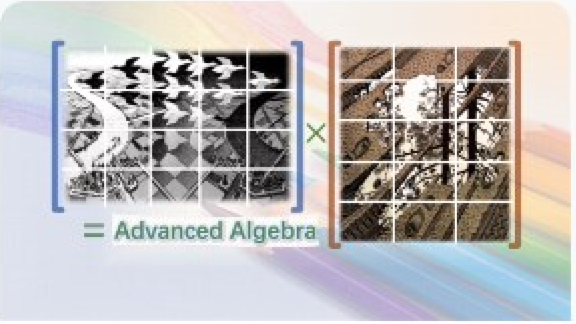
学银在线
xueyinonline.com

扫描二维码，开始学习课程

一键建课，共享资源

在超星（学习通）平台　用示范教学包建课

搜索“高等代数”，共 3条搜索结果



高等代数

宁德师范学院 | 林秀清、蒋剑剑、谢向...

引用次数 525　查看

高等代数

林秀清、蒋剑剑、谢向东、陈省江、沈吓妹、薛亚龙

引用次数 525

宁德师范学院

一键建课

示范教学包仅供教学使用，不能用作任何商业用途

https://www.xueyinonline.com/detail/226138859